|  |  |
| --- | --- |
| EENG | **Escola de Engenharia**  Departamento de Produção e Sistemas  Licenciatura em Engenharia Informática |

**Modelos Determinísticos de Investigação Operacional**

**Trabalho 1**

**Grupo 5:**

**André Silva 61018**

**João Lopes 61077**

**João Monteiro 53690**

**Paulo Cardoso 61043**

# Introdução

Este relatório tem como objeto de análise o primeiro trabalho da unidade curricular de MDIO.

Este trabalho apresenta-nos o desafio de resolver um problema de redes usando um método matemático devidamente formulado. Neste problema existem mensagens, chamadas de *streams*, que podem ter um ou vários fluxos; nós que podem ser entendidos como a origem e o destino de cada *stream*; e ligações entre nós, traduzidos por arestas no sistema.

O objetivo é conseguir enviar todas as *streams* através das arestas do sistema, desde a origem até ao destino, sem haver perdas ou ganhos de fluxos e por vezes com o menor custo possível.

A forma de conseguir atingir este objetivo passa pela tradução do problema num modelo de programação linear. Neste modelo, que será desenvolvido nas partes que se seguem neste relatório, existem três grandes pontos: o primeiro será identificar as variáveis de decisão, o segundo será a elaboração da função objetivo, e o terceiro ponto será a descrição das restrições a aplicar.

Relativamente às variáveis de decisão, deparámo-nos com um subproblema, isto é, a maneira de identificar em que direção vão os fluxos nas arestas e como conseguiremos manter os fluxos de diferentes *streams* separados no mesmo sistema.

A resolução que achamos foi utilizar a seguinte notação:

X[origem][destino][índice da stream]

De reparar que na notação está incluído um índice de *stream*. Este índice está identificado no enunciado como k, pertencente ao conjunto de *streams* K. Este conjunto será personalizado aos grupos através da remoção de *streams* identificadas pelos dois últimos algarismos do maior número de aluno do grupo. Assim, para o nosso grupo, o maior número é 61077 sendo considerado o 77. Para dois números iguais, apenas será removido uma *stream*, que no caso é a *stream* de origem 1 e destino 4. Com isto chegamos ao nosso conjunto K:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| *Stream* (s,t) | (1,2) | (1,5) | (2,3) | (2,4) | (3,4) | (3,5) | (4,5) |

Assim cada variável tem uma formulação única (com origem, destino e índice de *stream* utilizando a notação acima). Desta forma é possível controlar e identificar todas a variáveis do problema para formular o modelo matemático a usar. Relativamente à função objetivo e a descrição das restrições será relatado em cada uma das partes pois são variantes dos problemas.

Índice

[Introdução 2](#_Toc370676496)

[Parte I 4](#_Toc370676497)

[Questão 1 4](#_Toc370676498)

[Questão 2 5](#_Toc370676499)

[Questão 3 7](#_Toc370676500)

[Questão 4 8](#_Toc370676501)

[Questão 5 9](#_Toc370676502)

[Questão 6 11](#_Toc370676503)

[Parte II 12](#_Toc370676504)

[Questão 1 12](#_Toc370676505)

[Questão 2 13](#_Toc370676506)

[Questão 3 15](#_Toc370676507)

[Questão 4 16](#_Toc370676508)

[Questão 5 18](#_Toc370676509)

[Questão 6 19](#_Toc370676510)

[Parte III 20](#_Toc370676511)

[Questão 1 20](#_Toc370676512)

[Questão 2 21](#_Toc370676513)

[Questão 3 24](#_Toc370676514)

[Questão 4 25](#_Toc370676515)

[Parte IV 26](#_Toc370676516)

[Questão 1 26](#_Toc370676517)

[Questão 2 27](#_Toc370676518)

[Questão 3 30](#_Toc370676519)

[Questão 4 32](#_Toc370676520)

[Conclusão 34](#_Toc370676521)

# Parte I

Nesta parte pretende-se identificar os arcos por onde passam as *streams* sem ter em conta outras condições que não os custos de passagem por cada arco. O objetivo será enviar todas as *streams* e obter o menor custo possível.

## Questão 1

Seguindo o modelo de programação linear, temos de identificar as variáveis, a função objetivo e as restrições.

Para as variáveis usaremos a identificação antes descrita, X[origem][destino][índice da stream]. Isto representa o número de vezes que um fluxo passa no arco entre a origem e o destino. De reparar que iremos ter duas variáveis diferentes para o mesmo arco, em que uma representa a passagem numa direção e outra variável representa a direção oposta.

A função objetivo serão os custos de cada arco multiplicado pelo número de passagens nesse arco. Para esta função utilizamos o somatório das variáveis respeitantes a determinado arco, em ambas as direções e para todos os índices das *streams* e colocamos o resultado numa nova variável X[nó numa ponta][nó da outra ponta]. Com isto obtemos a seguinte expressão mais simplificada:

Min z = 8X12 + 12X13 + 2X23 + 7X24 + 10X25 + 4X34 + 6X35 + 1X45

Já para as restrições, para determinado nó, seguimos o padrão:

Fluxo de entrada - Fluxo de saída - Fluxo retido no nó + Fluxo produzido no nó = 0

⬄ Fluxo de entrada - Fluxo de saída = Fluxo retido no nó - Fluxo produzido no nó

Ou seja,

(somatório dos arcos de entrada no nó) - (somatório dos arcos de saída do nó) = valor

Em que para valor>0, existe retenção de fluxos nesse nó; valor<0, existe introdução de fluxos no sistema; e, para valor=0, existem tantos fluxos a entrar no nó, quanto a sair do mesmo.

Estas restrições encontram-se organizadas em blocos consoante o índice k da *stream*. Portanto, para cada *stream* a ser enviada teremos um conjunto de 5 restrições respeitantes ao comportamento que os fluxos poderão ter nos 5 nós do sistema.

Por último teremos as restrições de não negatividade, em que o valor em todas as variáveis será maior ou igual a zero.

Uma dúvida que pode surgir é se não deveria haver alguma restrição quanto à formação de ciclos possivelmente infinitos no sistema. Como resposta temos a função objetivo, isto é, como não existem arcos com custo nulo no sistema, qualquer duplicação no uso de determinado arco possuirá um custo maior, não indo de encontro com o objetivo da função, que é a minimização dos custos.

## Questão 2

Ficheiro de *input* no programa:

/\* Funcao Objecivo: Minimizar custo \*/

min: 8 x12 + 12 x13 + 2 x23 + 7 x24 + 10 x25 + 4 x34 + 6 x35 + 1 x45;

/\* Fluxos no sistema por stream \*/

//fluxo de entrada - fluxo de saida - fluxo retido no no + fluxo produzido no no = 0 <=>

//fluxo de entrada - fluxo de saida = fluxo retido no no - fluxo produzido no no

//stream (1,2) K=1

x211 + x311 - x121 - x131 = -8;

x121 + x321 + x421 + x521 - x211 - x231 - x241 - x251 = 8;

x131 + x231 + x431 + x531 - x311 - x321 - x341 - x351 = 0;

x241 + x341 + x541 - x421 - x431 - x451 = 0;

x251 + x351 + x451 - x521 - x531 - x541 = 0;

//stream (1,5) K=2

x212 + x312 - x122 - x132 = -20;

x122 + x322 + x422 + x522 - x212 - x232 - x242 - x252 = 0;

x132 + x232 + x432 + x532 - x312 - x322 - x342 - x352 = 0;

x242 + x342 + x542 - x422 - x432 - x452 = 0;

x252 + x352 + x452 - x522 - x532 - x542 = 20;

//stream (2,3) K=3

x213 + x313 - x123 - x133 = 0;

x123 + x323 + x423 + x523 - x213 - x233 - x243 - x253 = -12;

x133 + x233 + x433 + x533 - x313 - x323 - x343 - x353 = 12;

x243 + x343 + x543 - x423 - x433 - x453 = 0;

x253 + x353 + x453 - x523 - x533 - x543 = 0;

//stream (2,4) K=4

x214 + x314 - x124 - x134 = 0;

x124 + x324 + x424 + x524 - x214 - x234 - x244 - x254 = -16;

x134 + x234 + x434 + x534 - x314 - x324 - x344 - x354 = 0;

x244 + x344 + x544 - x424 - x434 - x454 = 16;

x254 + x354 + x454 - x524 - x534 - x544 = 0;

//stream (3,4) K=5

x215 + x315 - x125 - x135 = 0;

x125 + x325 + x425 + x525 - x215 - x235 - x245 - x255 = 0;

x135 + x235 + x435 + x535 - x315 - x325 - x345 - x355 = -4;

x245 + x345 + x545 - x425 - x435 - x455 = 4;

x255 + x355 + x455 - x525 - x535 - x545 = 0;

//stream (3,5) K=6

x216 + x316 - x126 - x136 = 0;

x126 + x326 + x426 + x526 - x216 - x236 - x246 - x256 = 0;

x136 + x236 + x436 + x536 - x316 - x326 - x346 - x356 = -3;

x246 + x346 + x546 - x426 - x436 - x456 = 0;

x256 + x356 + x456 - x526 - x536 - x546 = 3;

//stream (4,5) K=7

x217 + x317 - x127 - x137 = 0;

x127 + x327 + x427 + x527 - x217 - x237 - x247 - x257 = 0;

x137 + x237 + x437 + x537 - x317 - x327 - x347 - x357 = 0;

x247 + x347 + x547 - x427 - x437 - x457 = -10;

x257 + x357 + x457 - x527 - x537 - x547 = 10;

/\* Fluxos no sistema por arcos \*/

x12 = x121 + x211 + x122 + x212 + x123 + x213 + x124 + x214 + x125 + x215 + x126 + x216 + x127 + x217;

x13 = x131 + x311 + x132 + x312 + x133 + x313 + x134 + x314 + x135 + x315 + x136 + x316 + x137 + x317;

x23 = x231 + x321 + x232 + x322 + x233 + x323 + x234 + x324 + x235 + x325 + x236 + x326 + x237 + x327;

x24 = x241 + x421 + x242 + x422 + x243 + x423 + x244 + x424 + x245 + x425 + x246 + x426 + x247 + x427;

x25 = x251 + x521 + x252 + x522 + x253 + x523 + x254 + x524 + x255 + x525 + x256 + x526 + x257 + x527;

x34 = x341 + x431 + x342 + x432 + x343 + x433 + x344 + x434 + x345 + x435 + x346 + x436 + x347 + x437;

x35 = x351 + x531 + x352 + x532 + x353 + x533 + x354 + x534 + x355 + x535 + x356 + x536 + x357 + x537;

x45 = x451 + x541 + x452 + x542 + x453 + x543 + x454 + x544 + x455 + x545 + x456 + x546 + x457 + x547;

## Questão 3

Ficheiro de *output* no programa:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Variables | result |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 525 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| x12 | 28 |  | x212 | 0 |  | x214 | 0 |  | x216 | 0 |
| x13 | 0 |  | x312 | 0 |  | x314 | 0 |  | x316 | 0 |
| x23 | 48 |  | x122 | 20 |  | x124 | 0 |  | x126 | 0 |
| x24 | 0 |  | x132 | 0 |  | x134 | 0 |  | x136 | 0 |
| x25 | 0 |  | x322 | 0 |  | x324 | 0 |  | x326 | 0 |
| x34 | 43 |  | x422 | 0 |  | x424 | 0 |  | x426 | 0 |
| x35 | 0 |  | x522 | 0 |  | x524 | 0 |  | x526 | 0 |
| x45 | 33 |  | x232 | 20 |  | x234 | 16 |  | x236 | 0 |
| x211 | 0 |  | x242 | 0 |  | x244 | 0 |  | x246 | 0 |
| x311 | 0 |  | x252 | 0 |  | x254 | 0 |  | x256 | 0 |
| x121 | 8 |  | x432 | 0 |  | x434 | 0 |  | x436 | 0 |
| x131 | 0 |  | x532 | 0 |  | x534 | 0 |  | x536 | 0 |
| x321 | 0 |  | x342 | 20 |  | x344 | 16 |  | x346 | 3 |
| x421 | 0 |  | x352 | 0 |  | x354 | 0 |  | x356 | 0 |
| x521 | 0 |  | x542 | 0 |  | x544 | 0 |  | x546 | 0 |
| x231 | 0 |  | x452 | 20 |  | x454 | 0 |  | x456 | 3 |
| x241 | 0 |  | x213 | 0 |  | x215 | 0 |  | x217 | 0 |
| x251 | 0 |  | x313 | 0 |  | x315 | 0 |  | x317 | 0 |
| x431 | 0 |  | x123 | 0 |  | x125 | 0 |  | x127 | 0 |
| x531 | 0 |  | x133 | 0 |  | x135 | 0 |  | x137 | 0 |
| x341 | 0 |  | x323 | 0 |  | x325 | 0 |  | x327 | 0 |
| x351 | 0 |  | x423 | 0 |  | x425 | 0 |  | x427 | 0 |
| x541 | 0 |  | x523 | 0 |  | x525 | 0 |  | x527 | 0 |
| x451 | 0 |  | x233 | 12 |  | x235 | 0 |  | x237 | 0 |
|  |  |  | x243 | 0 |  | x245 | 0 |  | x247 | 0 |
|  |  |  | x253 | 0 |  | x255 | 0 |  | x257 | 0 |
|  |  |  | x433 | 0 |  | x435 | 0 |  | x437 | 0 |
|  |  |  | x533 | 0 |  | x535 | 0 |  | x537 | 0 |
|  |  |  | x343 | 0 |  | x345 | 4 |  | x347 | 0 |
|  |  |  | x353 | 0 |  | x355 | 0 |  | x357 | 0 |
|  |  |  | x543 | 0 |  | x545 | 0 |  | x547 | 0 |
|  |  |  | x453 | 0 |  | x455 | 0 |  | x457 | 10 |

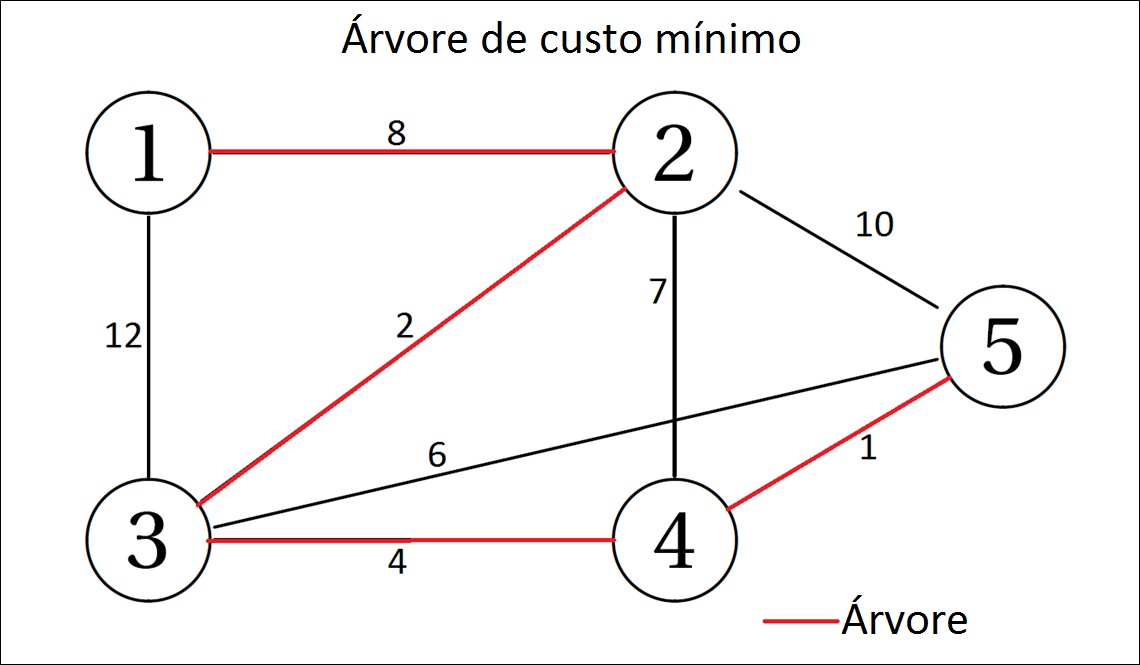
## Questão 4

Para verificar a conservação de fluxo da *stream*, iremos explicitar o que está a acontecer em cada nó. Para isto iremos utilizar o seguinte quadro:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Nó | Entradas no nó por índice k | | Total de entradas | Saídas do nó por índice k | | Total de saídas | Retenções no nó por índice k | |
| 1 | - | - | 0 | k=1 | 8 | 28 | - | - |
| - | - | k=2 | 20 | - | - |
| 2 | k=1 | 8 | 28 | k=2 | 20 | 48 | k=1 | 8 |
| k=2 | 20 | k=3 | 12 | - | - |
| - | - | k=4 | 16 | - | - |
| 3 | k=2 | 20 | 48 | k=2 | 20 | 43 | k=3 | 12 |
| k=3 | 12 | k=4 | 16 | - | - |
| k=4 | 16 | k=5 | 4 | - | - |
| - | - | k=6 | 3 | - | - |
| 4 | k=2 | 20 | 43 | k=2 | 20 | 33 | k=4 | 16 |
| k=4 | 16 | k=6 | 3 | k=5 | 4 |
| k=5 | 4 | k=7 | 10 | - | - |
| k=6 | 3 | - | - | - | - |
| 5 | k=2 | 20 | 33 | - | - | 0 | k=2 | 20 |
| k=6 | 3 | - | - | k=6 | 3 |
| k=7 | 10 | - | - | k=7 | 10 |

Neste quadro é possível verificar que existe conservação, isto é, o fluxo que sai de determinado nó corresponde à soma do fluxo de entrada no nó com fluxo a introduzir nesse nó, subtraindo o valor que deve ficar retido nesse nó. Com isto, no final do quadro, podemos verificar que não restam fluxos perdidos no sistema, ou seja, que os fluxos introduzidos chegam ao destino.

## Questão 5

Como nesta parte não temos capacidades para os arcos do sistema, torna-se claro que os fluxos seguirão o caminho mais curto. Ora, se tal é verdade, será possível traduzir o sistema numa árvore de custo mínimo, ou seja, um caminho que linha todos os nós na árvore com 4 (nº nós-1) arcos, sem ciclos e com o custo mínimo na ligação entre os nós.

Ao cumprir estas condições chegamos à seguinte árvore:

Para comprovar que a solução encontrada usa o caminho mais curto para ligar a origem ao destino em cada *stream*, iremos verificar se as variáveis utilizadas se encontram na árvore.

* Para a *stream* do nó 1 para o nó 2 (k=1) com fluxo 8 temos a passagem de fluxo pela variável X121 com valor 8 e as restantes variáveis a 0. Verifica-se o uso do arco de 1 para 2 pertencente à árvore.
* Para a *stream* do nó 1 para o nó 5 (k=2) com fluxo 20 temos a passagem de fluxo pela variável X122, X232, X342 e X452 com valor 20 em cada e as restantes variáveis a 0. Verifica-se o uso dos arcos de 1 para 2, de 2 para 3, de 3 para 4 e de 4 para 5, pertencentes à árvore.
* Para a *stream* do nó 2 para o nó 3 (k=3) com fluxo 12 temos a passagem de fluxo pela variável X233 com valor 12 e as restantes variáveis a 0. Verifica-se o uso do arco de 2 para 3 pertencente à árvore.
* Para a *stream* do nó 2 para o nó 4 (k=4) com fluxo 16 temos a passagem de fluxo pela variável X234 e X344 com valor 16 em cada e as restantes variáveis a 0. Verifica-se o uso dos arcos de 2 para 3 e de 3 para 4, pertencentes à árvore.
* Para a *stream* do nó 3 para o nó 4 (k=5) com fluxo 4 temos a passagem de fluxo pela variável X345 com valor 4 e as restantes variáveis a 0. Verifica-se o uso do arco de 3 para 4 pertencente à árvore.
* Para a *stream* do nó 3 para o nó 5 (k=6) com fluxo 3 temos a passagem de fluxo pela variável X346 e X456 com valor 3 em cada e as restantes variáveis a 0. Verifica-se o uso dos arcos de 3 para 4 e de 4 para 5, pertencentes à árvore.
* Para a *stream* do nó 4 para o nó 5 (k=7) com fluxo 10 temos a passagem de fluxo pela variável X457 com valor 10 e as restantes variáveis a 0. Verifica-se o uso do arco de 4 para 5 pertencente à árvore.

Ora, como todos os arcos utilizados pertencem à árvore, pode-se concluir que os arcos da solução correspondem ao uso do caminho mais curto entre a origem e o destino das *streams*.

## Questão 6

Para verificar que o valor de z = 525 corresponde ao valor mínimo, precisamos garantir três pontos: 1) Existe conservação dos fluxos de cada *stream* no sistema; 2) O caminho utilizado por cada *stream* corresponde ao menor custo; e 3) A soma do valor da multiplicação do custo de cada arco pelo número de vezes que esse arco foi utilizado para todos os arcos do sistema deverá totalizar o valor mínimo, neste caso 525.

Ora, os pontos 1) e 2) encontram-se verificados nas questões 4 e 5 respetivamente, fica a faltar verificar o ponto 3).

Para isso, tal como descrito na questão 1 em relação à função objetivo, utilizamos uma variável independente de *streams* e de direções, que congrega em si a soma de todas as utilizações desse arco nas várias *streams*. Temos assim que:

* O arco que liga 1 a 2 foi utilizado 28 vezes. O custo deste arco é 8. O custo total é 8x28 = 224.
* O arco que liga 1 a 3 foi utilizado 0 vezes. O custo deste arco é 12. O custo total é 12x0 = 0.
* O arco que liga 2 a 3 foi utilizado 48 vezes. O custo deste arco é 2. O custo total é 2x48 = 96.
* O arco que liga 2 a 4 foi utilizado 0 vezes. O custo deste arco é 7. O custo total é 7x0 = 0.
* O arco que liga 2 a 5 foi utilizado 0 vezes. O custo deste arco é 10. O custo total é 10x0 = 0.
* O arco que liga 3 a 4 foi utilizado 43 vezes. O custo deste arco é 4. O custo total é 4x43 = 172.
* O arco que liga 3 a 5 foi utilizado 0 vezes. O custo deste arco é 6. O custo total é 6x0 = 0.
* O arco que liga 4 a 5 foi utilizado 33 vezes. O custo deste arco é 1. O custo total é 1x33 = 33.

Então o custo total do sistema será a soma dos custos de cada arco, ou seja, 224 + 96 + 172 + 33 = 525. Ora este valor é igual ao resultado que queríamos obter.

# Parte II

Para a parte II, o modelo anterior deve ser modificado para acomodar limitações de capacidade nos arcos do sistema. Isto faz que a soma de todos os fluxos em cada arco não possa ser superior à capacidade do mesmo.

## Questão 1

Ao modelo da parte I é acrescentado uma capacidade máxima igual para todos os arcos no valor de trinta e duas unidades. Assim teremos oito novas restrições (uma para cada um dos arcos) na seguinte forma:

X[nó numa ponta][nó da outra ponta] <= 32

Desta forma garantimos que a soma dos fluxos dos vários índices k nesse arco, independente da orientação, não ultrapassa a capacidade. Caso tente ultrapassar será necessário escolher uma alternativa ao arco em causa e mandar o excesso por ela (caso ainda tenha capacidade).

## Questão 2

Ficheiro de *input* no programa:

/\* Funcao Objecivo: Minimizar custo \*/

min: 8 x12 + 12 x13 + 2 x23 + 7 x24 + 10 x25 + 4 x34 + 6 x35 + 1 x45;

/\* Capacidade por arco \*/

x12 <= 32;

x13 <= 32;

x23 <= 32;

x24 <= 32;

x25 <= 32;

x34 <= 32;

x35 <= 32;

x45 <= 32;

/\* Fluxos no sistema por stream \*/

//fluxo de entrada - fluxo de saida - fluxo retido no no + fluxo produzido no no = 0 <=>

//fluxo de entrada - fluxo de saida = fluxo retido no no - fluxo produzido no no

//stream (1,2) K=1

x211 + x311 - x121 - x131 = -8;

x121 + x321 + x421 + x521 - x211 - x231 - x241 - x251 = 8;

x131 + x231 + x431 + x531 - x311 - x321 - x341 - x351 = 0;

x241 + x341 + x541 - x421 - x431 - x451 = 0;

x251 + x351 + x451 - x521 - x531 - x541 = 0;

//stream (1,5) K=2

x212 + x312 - x122 - x132 = -20;

x122 + x322 + x422 + x522 - x212 - x232 - x242 - x252 = 0;

x132 + x232 + x432 + x532 - x312 - x322 - x342 - x352 = 0;

x242 + x342 + x542 - x422 - x432 - x452 = 0;

x252 + x352 + x452 - x522 - x532 - x542 = 20;

//stream (2,3) K=3

x213 + x313 - x123 - x133 = 0;

x123 + x323 + x423 + x523 - x213 - x233 - x243 - x253 = -12;

x133 + x233 + x433 + x533 - x313 - x323 - x343 - x353 = 12;

x243 + x343 + x543 - x423 - x433 - x453 = 0;

x253 + x353 + x453 - x523 - x533 - x543 = 0;

//stream (2,4) K=4

x214 + x314 - x124 - x134 = 0;

x124 + x324 + x424 + x524 - x214 - x234 - x244 - x254 = -16;

x134 + x234 + x434 + x534 - x314 - x324 - x344 - x354 = 0;

x244 + x344 + x544 - x424 - x434 - x454 = 16;

x254 + x354 + x454 - x524 - x534 - x544 = 0;

//stream (3,4) K=5

x215 + x315 - x125 - x135 = 0;

x125 + x325 + x425 + x525 - x215 - x235 - x245 - x255 = 0;

x135 + x235 + x435 + x535 - x315 - x325 - x345 - x355 = -4;

x245 + x345 + x545 - x425 - x435 - x455 = 4;

x255 + x355 + x455 - x525 - x535 - x545 = 0;

//stream (3,5) K=6

x216 + x316 - x126 - x136 = 0;

x126 + x326 + x426 + x526 - x216 - x236 - x246 - x256 = 0;

x136 + x236 + x436 + x536 - x316 - x326 - x346 - x356 = -3;

x246 + x346 + x546 - x426 - x436 - x456 = 0;

x256 + x356 + x456 - x526 - x536 - x546 = 3;

//stream (4,5) K=7

x217 + x317 - x127 - x137 = 0;

x127 + x327 + x427 + x527 - x217 - x237 - x247 - x257 = 0;

x137 + x237 + x437 + x537 - x317 - x327 - x347 - x357 = 0;

x247 + x347 + x547 - x427 - x437 - x457 = -10;

x257 + x357 + x457 - x527 - x537 - x547 = 10;

/\* Fluxos no sistema por arcos \*/

x12 = x121 + x211 + x122 + x212 + x123 + x213 + x124 + x214 + x125 + x215 + x126 + x216 + x127 + x217;

x13 = x131 + x311 + x132 + x312 + x133 + x313 + x134 + x314 + x135 + x315 + x136 + x316 + x137 + x317;

x23 = x231 + x321 + x232 + x322 + x233 + x323 + x234 + x324 + x235 + x325 + x236 + x326 + x237 + x327;

x24 = x241 + x421 + x242 + x422 + x243 + x423 + x244 + x424 + x245 + x425 + x246 + x426 + x247 + x427;

x25 = x251 + x521 + x252 + x522 + x253 + x523 + x254 + x524 + x255 + x525 + x256 + x526 + x257 + x527;

x34 = x341 + x431 + x342 + x432 + x343 + x433 + x344 + x434 + x345 + x435 + x346 + x436 + x347 + x437;

x35 = x351 + x531 + x352 + x532 + x353 + x533 + x354 + x534 + x355 + x535 + x356 + x536 + x357 + x537;

x45 = x451 + x541 + x452 + x542 + x453 + x543 + x454 + x544 + x455 + x545 + x456 + x546 + x457 + x547;

## Questão 3

Ficheiro de *output* no programa:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Variables | result |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 542 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| x12 | 28 |  | x212 | 0 |  | x214 | 0 |  | x216 | 0 |
| x13 | 0 |  | x312 | 0 |  | x314 | 0 |  | x316 | 0 |
| x23 | 32 |  | x122 | 20 |  | x124 | 0 |  | x126 | 0 |
| x24 | 16 |  | x132 | 0 |  | x134 | 0 |  | x136 | 0 |
| x25 | 0 |  | x322 | 0 |  | x324 | 0 |  | x326 | 0 |
| x34 | 26 |  | x422 | 0 |  | x424 | 0 |  | x426 | 0 |
| x35 | 1 |  | x522 | 0 |  | x524 | 0 |  | x526 | 0 |
| x45 | 32 |  | x232 | 4 |  | x234 | 16 |  | x236 | 0 |
| x211 | 0 |  | x242 | 16 |  | x244 | 0 |  | x246 | 0 |
| x311 | 0 |  | x252 | 0 |  | x254 | 0 |  | x256 | 0 |
| x121 | 8 |  | x432 | 0 |  | x434 | 0 |  | x436 | 0 |
| x131 | 0 |  | x532 | 0 |  | x534 | 0 |  | x536 | 0 |
| x321 | 0 |  | x342 | 3 |  | x344 | 16 |  | x346 | 3 |
| x421 | 0 |  | x352 | 1 |  | x354 | 0 |  | x356 | 0 |
| x521 | 0 |  | x542 | 0 |  | x544 | 0 |  | x546 | 0 |
| x231 | 0 |  | x452 | 19 |  | x454 | 0 |  | x456 | 3 |
| x241 | 0 |  | x213 | 0 |  | x215 | 0 |  | x217 | 0 |
| x251 | 0 |  | x313 | 0 |  | x315 | 0 |  | x317 | 0 |
| x431 | 0 |  | x123 | 0 |  | x125 | 0 |  | x127 | 0 |
| x531 | 0 |  | x133 | 0 |  | x135 | 0 |  | x137 | 0 |
| x341 | 0 |  | x323 | 0 |  | x325 | 0 |  | x327 | 0 |
| x351 | 0 |  | x423 | 0 |  | x425 | 0 |  | x427 | 0 |
| x541 | 0 |  | x523 | 0 |  | x525 | 0 |  | x527 | 0 |
| x451 | 0 |  | x233 | 12 |  | x235 | 0 |  | x237 | 0 |
|  |  |  | x243 | 0 |  | x245 | 0 |  | x247 | 0 |
|  |  |  | x253 | 0 |  | x255 | 0 |  | x257 | 0 |
|  |  |  | x433 | 0 |  | x435 | 0 |  | x437 | 0 |
|  |  |  | x533 | 0 |  | x535 | 0 |  | x537 | 0 |
|  |  |  | x343 | 0 |  | x345 | 4 |  | x347 | 0 |
|  |  |  | x353 | 0 |  | x355 | 0 |  | x357 | 0 |
|  |  |  | x543 | 0 |  | x545 | 0 |  | x547 | 0 |
|  |  |  | x453 | 0 |  | x455 | 0 |  | x457 | 10 |

## Questão 4

Para verificar a veracidade do ponto, colocamos em causa a conversação dos fluxos e a capacidade dos arcos. Quanto à capacidade dos arcos no output percebemos que nenhuma aresta ultrapassa um fluxo de 32 unidades.

Relativamente à conservação de fluxos utilizaremos o seguinte quadro:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Nó | Entradas no nó por índice k | | Total de entradas | Saídas do nó por índice k | | Total de saídas | Retenções no nó por índice k | |
| 1 | - | - | 0 | k=1 | 8 | 28 | - | - |
| - | - | k=2 | 20 | - | - |
| 2 | k=1 | 8 | 28 | k=2 | 4 | 48 | k=1 | 8 |
| k=2 | 20 | k=2 | 16 | - | - |
| - | - | k=3 | 12 | - | - |
| - | - | k=4 | 16 | - | - |
| 3 | k=2 | 4 | 32 | k=2 | 3 | 27 | k=3 | 12 |
| k=3 | 12 | k=2 | 1 | - | - |
| k=4 | 16 | k=4 | 16 | - | - |
| - | - | k=5 | 4 | - | - |
| - | - | k=6 | 3 | - | - |
| 4 | k=2 | 16 | 42 | k=2 | 19 | 32 | k=4 | 16 |
| k=2 | 3 | k=6 | 3 | k=5 | 4 |
| k=4 | 16 | k=7 | 10 | - | - |
| k=5 | 4 | - | - | - | - |
| k=6 | 3 | - | - | - | - |
| 5 | k=2 | 1 | 33 | - | - | 0 | k=2 | 20 |
| k=2 | 19 | - | - | k=6 | 3 |
| k=6 | 3 | - | - | k=7 | 10 |
| k=7 | 10 | - | - | - | - |

Utilizando o mesmo método da questão 5 da parte I, retiramos a conclusão que existem dois arcos sem fluxo pois existem arcos alternativos mais baratos. Apercebemo-nos também que os arcos com menores custos (arco 2->3 e arco 4->5) estão na capacidade máxima de 32 unidades obrigando a ligações adicionais (arco 3->5 e arco 2->4).

Ora provando o valor mínimo de 542 unidades monetárias teremos então a soma (retirando os arcos não usados - valores nulos) entre:

* Relativamente ao arco x12 temos um movimento de 28 unidades com um custo unitário de 8 unidades. Assim sendo temos um valor de 224 unidades monetárias.
* Relativamente ao arco x23 temos um movimento de 32 unidades com um custo unitário de 2 unidades. Assim sendo temos um valor de 64 unidades monetárias.
* Relativamente ao arco x24 temos um movimento de 16 unidades com um custo unitário de 7 unidades. Assim sendo temos um valor de 112 unidades monetárias.
* Relativamente ao arco x34 temos um movimento de 26 unidades com um custo unitário de 4 unidades. Assim sendo temos um valor de 104 unidades monetárias.
* Relativamente ao arco x35 temos um movimento de 1 unidade com um custo unitário de 6 unidades. Assim sendo temos um valor de 6 unidades monetárias.
* Relativamente ao arco x45 temos um movimento de 32 unidades com um custo unitário de 1 unidade. Assim sendo temos um valor de 32 unidades monetárias.

Temos 224 + 64 + 112 + 104 + 6 + 32 = 542, provando assim que a solução é válida e ótima.

## Questão 5

Com o aumento das oito restrições da parte I para a parte II apercebemo-nos que apenas os arcos com capacidade superior a 32 unidades é que sofreram alteração. A partir daqui, iremos referir k=i para indicar o índice da *stream* usada. Fica assim facilitada a identificação no output produzido.

No nó 1, o caminho tomado é exatamente o mesmo.

Passando para o nó 2, o caminho de 2 para 3 é esgotado (capacidade 32 é menor que os 48 a serem transportados) sendo as unidades adicionais a tomar um caminho alternativo. De notar que o caminho alternativo tomado é sempre o mais barato. Sendo assim temos 32 unidades no sentido do nó 2 para o nó 3 (16 unidades proveniente de k=4, 12 provenientes de k=3 e 4 unidades de k=2).

Passando para o nó 3, as unidades vão se deslocar entre 2 caminhos diferenciados. Em primeiro lugar teremos uma única unidade (k=2) a deslocar-se do nó 3 para o nó 5 devido ao facto da ligação entre os nós 4 e 5 estar esgotada (explicado em seguida no nó 4). As outras 26 unidades (16 unidades de k=4, 3 unidades de k=2, 3 unidades para k=6 e 4 unidades de k=5) são encaminhadas a partir do arco que liga o nó 3 ao nó 4.

Por fim no nodo 4, teremos a ultima ligação com capacidade máxima entre o nodo 4 e 5 levando 10 unidades de k=7, 19 unidades de k=2 e 3 unidades para k=6).

## Questão 6

Seguindo o processo de “adaptive routing”, temos que um *router* tenta mandar os pacotes pelo caminho mais direto. Mas no caso de haver indisponibilidade numa ligação, o *router* automaticamente envia os pacotes por outra ligação alternativa.

No nosso problema, a ligação estar indisponível é representada pelo arco ter atingido a capacidade máxima. Assim, em determinado nó com arcos indisponíveis, haverá a utilização de arcos com maior custo. É o caso do nó 2.

Neste nó, a ligação X23 chegou ao limite da sua capacidade, então, para conseguir enviar os fluxos restantes, as saídas de fluxos do nó seguem o segundo caminho mais curto, no caso X24.

Assim, temos que no nodo 2 existem 48 fluxos a sair, dos quais 32 seguem o arco X23 (67%) com custo unitário 2, 16 seguem o arco X24 (33%) com custo unitário 7 e 0 seguem o arco X25 (0%) com custo unitário 10.

# Parte III

Pela teoria de filas de espera, quanto mais o fluxo numa ligação se aproxima da capacidade máxima, a função tende para a exponencial. Para resolver esta situação, costuma-se definir um valor a evitar ser ultrapassado, mesmo havendo capacidade para mais na ligação. Chamamos a este valor de folga.

Nesta parte, o problema vai mais longe neste conceito. No enunciado pede-se que se formule o problema de forma a carga equilibrada nos vários arcos, ou seja, que a prioridade deixe de ser o custo mínimo para passar a ter as folgas nos vários arcos o mais semelhante possível.

## Questão 1

O problema proposto é uma sequência da parte anterior, isto é, continuamos a ter fluxos de *streams* a serem transportados e capacidades para cada arco. No entanto aqui não importa o custo mas sim a folga que existe em todos os arcos. Com isto, a nossa função objetivo vai deixar de ser a minimização de custos para ser a maximização da folga em todos os arcos e manter o valor o mais igual para todos.

Com estes requerimentos chegamos à seguinte função objetivo:

Max z = folgaMinima

Em que a variável “folgaMnima” é, tal como o nome indica, o valor de folga que todos os arcos têm. Ou seja, existirão restrições que garantam isto ao definir, para todos os oito arcos:

folgaMinima <= folga[nó numa ponta][nó da outra ponta]

A variável “folga” é a diferença entre a capacidade do arco (32) e o número de fluxos que passam nesse arco.

Com esta nova função objetivo e este novo conjunto de restrições, passamos a ter a solução ao problema proposto.

## Questão 2

Ficheiro de *input* no programa:

/\* Funcao Objecivo: Maior folga possivel em todos os arcos \*/

max: folgaMinima;

/\* Equilibrio de folgas nos arcos \*/

folgaMinima <= folga12;

folgaMinima <= folga13;

folgaMinima <= folga23;

folgaMinima <= folga24;

folgaMinima <= folga25;

folgaMinima <= folga34;

folgaMinima <= folga35;

folgaMinima <= folga45;

/\* Folgas \*/

//Folgas no arco ij

folga12 = 32 - x12;

folga13 = 32 - x13;

folga23 = 32 - x23;

folga24 = 32 - x24;

folga25 = 32 - x25;

folga34 = 32 - x34;

folga35 = 32 - x35;

folga45 = 32 - x45;

/\* Capacidade por arco \*/

x12 <= 32;

x13 <= 32;

x23 <= 32;

x24 <= 32;

x25 <= 32;

x34 <= 32;

x35 <= 32;

x45 <= 32;

/\* Fluxos no sistema por stream \*/

//fluxo de entrada - fluxo de saida - fluxo retido no no + fluxo produzido no no = 0 <=>

//fluxo de entrada - fluxo de saida = fluxo retido no no - fluxo produzido no no

//stream (1,2) K=1

x211 + x311 - x121 - x131 = -8;

x121 + x321 + x421 + x521 - x211 - x231 - x241 - x251 = 8;

x131 + x231 + x431 + x531 - x311 - x321 - x341 - x351 = 0;

x241 + x341 + x541 - x421 - x431 - x451 = 0;

x251 + x351 + x451 - x521 - x531 - x541 = 0;

//stream (1,5) K=2

x212 + x312 - x122 - x132 = -20;

x122 + x322 + x422 + x522 - x212 - x232 - x242 - x252 = 0;

x132 + x232 + x432 + x532 - x312 - x322 - x342 - x352 = 0;

x242 + x342 + x542 - x422 - x432 - x452 = 0;

x252 + x352 + x452 - x522 - x532 - x542 = 20;

//stream (2,3) K=3

x213 + x313 - x123 - x133 = 0;

x123 + x323 + x423 + x523 - x213 - x233 - x243 - x253 = -12;

x133 + x233 + x433 + x533 - x313 - x323 - x343 - x353 = 12;

x243 + x343 + x543 - x423 - x433 - x453 = 0;

x253 + x353 + x453 - x523 - x533 - x543 = 0;

//stream (2,4) K=4

x214 + x314 - x124 - x134 = 0;

x124 + x324 + x424 + x524 - x214 - x234 - x244 - x254 = -16;

x134 + x234 + x434 + x534 - x314 - x324 - x344 - x354 = 0;

x244 + x344 + x544 - x424 - x434 - x454 = 16;

x254 + x354 + x454 - x524 - x534 - x544 = 0;

//stream (3,4) K=5

x215 + x315 - x125 - x135 = 0;

x125 + x325 + x425 + x525 - x215 - x235 - x245 - x255 = 0;

x135 + x235 + x435 + x535 - x315 - x325 - x345 - x355 = -4;

x245 + x345 + x545 - x425 - x435 - x455 = 4;

x255 + x355 + x455 - x525 - x535 - x545 = 0;

//stream (3,5) K=6

x216 + x316 - x126 - x136 = 0;

x126 + x326 + x426 + x526 - x216 - x236 - x246 - x256 = 0;

x136 + x236 + x436 + x536 - x316 - x326 - x346 - x356 = -3;

x246 + x346 + x546 - x426 - x436 - x456 = 0;

x256 + x356 + x456 - x526 - x536 - x546 = 3;

//stream (4,5) K=7

x217 + x317 - x127 - x137 = 0;

x127 + x327 + x427 + x527 - x217 - x237 - x247 - x257 = 0;

x137 + x237 + x437 + x537 - x317 - x327 - x347 - x357 = 0;

x247 + x347 + x547 - x427 - x437 - x457 = -10;

x257 + x357 + x457 - x527 - x537 - x547 = 10;

/\* Fluxos no sistema por arcos \*/

x12 = x121 + x211 + x122 + x212 + x123 + x213 + x124 + x214 + x125 + x215 + x126 + x216 + x127 + x217;

x13 = x131 + x311 + x132 + x312 + x133 + x313 + x134 + x314 + x135 + x315 + x136 + x316 + x137 + x317;

x23 = x231 + x321 + x232 + x322 + x233 + x323 + x234 + x324 + x235 + x325 + x236 + x326 + x237 + x327;

x24 = x241 + x421 + x242 + x422 + x243 + x423 + x244 + x424 + x245 + x425 + x246 + x426 + x247 + x427;

x25 = x251 + x521 + x252 + x522 + x253 + x523 + x254 + x524 + x255 + x525 + x256 + x526 + x257 + x527;

x34 = x341 + x431 + x342 + x432 + x343 + x433 + x344 + x434 + x345 + x435 + x346 + x436 + x347 + x437;

x35 = x351 + x531 + x352 + x532 + x353 + x533 + x354 + x534 + x355 + x535 + x356 + x536 + x357 + x537;

x45 = x451 + x541 + x452 + x542 + x453 + x543 + x454 + x544 + x455 + x545 + x456 + x546 + x457 + x547;

## Questão 3

Ficheiro de *output* no programa:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Variables | result |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 18 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| folgaMinima | 18 |  | x212 | 0 |  | x214 | 0 |  | x216 | 0 |
| folga12 | 18 |  | x312 | 0 |  | x314 | 0 |  | x316 | 0 |
| folga13 | 18 |  | x122 | 7,5 |  | x124 | 0 |  | x126 | 0 |
| folga23 | 18 |  | x132 | 12,5 |  | x134 | 0 |  | x136 | 0 |
| folga24 | 18 |  | x322 | 0 |  | x324 | 0 |  | x326 | 0 |
| folga25 | 18 |  | x422 | 0 |  | x424 | 0 |  | x426 | 0 |
| folga34 | 27 |  | x522 | 0 |  | x524 | 0 |  | x526 | 0 |
| folga35 | 18 |  | x232 | 0 |  | x234 | 0 |  | x236 | 0 |
| folga45 | 18 |  | x242 | 0 |  | x244 | 11,5 |  | x246 | 0 |
| x12 | 14 |  | x252 | 7,5 |  | x254 | 4,5 |  | x256 | 0 |
| x13 | 14 |  | x432 | 0 |  | x434 | 0 |  | x436 | 0 |
| x23 | 14 |  | x532 | 0 |  | x534 | 0 |  | x536 | 0 |
| x24 | 14 |  | x342 | 1,5 |  | x344 | 0 |  | x346 | 0 |
| x25 | 14 |  | x352 | 11 |  | x354 | 0 |  | x356 | 3 |
| x34 | 5 |  | x542 | 0 |  | x544 | 4,5 |  | x546 | 0 |
| x35 | 14 |  | x452 | 1,5 |  | x454 | 0 |  | x456 | 0 |
| x45 | 14 |  | x213 | 0 |  | x215 | 0 |  | x217 | 0 |
| x211 | 0 |  | x313 | 0 |  | x315 | 0 |  | x317 | 0 |
| x311 | 0 |  | x123 | 0 |  | x125 | 0 |  | x127 | 0 |
| x121 | 6,5 |  | x133 | 0 |  | x135 | 0 |  | x137 | 0 |
| x131 | 1,5 |  | x323 | 0 |  | x325 | 0,5 |  | x327 | 0 |
| x321 | 1,5 |  | x423 | 0 |  | x425 | 0 |  | x427 | 2 |
| x421 | 0 |  | x523 | 0 |  | x525 | 0 |  | x527 | 0 |
| x521 | 0 |  | x233 | 12 |  | x235 | 0 |  | x237 | 0 |
| x231 | 0 |  | x243 | 0 |  | x245 | 0,5 |  | x247 | 0 |
| x241 | 0 |  | x253 | 0 |  | x255 | 0 |  | x257 | 2 |
| x251 | 0 |  | x433 | 0 |  | x435 | 0 |  | x437 | 0 |
| x431 | 0 |  | x533 | 0 |  | x535 | 0 |  | x537 | 0 |
| x531 | 0 |  | x343 | 0 |  | x345 | 3,5 |  | x347 | 0 |
| x341 | 0 |  | x353 | 0 |  | x355 | 0 |  | x357 | 0 |
| x351 | 0 |  | x543 | 0 |  | x545 | 0 |  | x547 | 0 |
| x541 | 0 |  | x453 | 0 |  | x455 | 0 |  | x457 | 8 |
| x451 | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

## Questão 4

Para verificar que a solução é válida, temos de garantir: 1) existe conservação de fluxos no sistema; 2) os fluxos chegam ao destino; 3) As capacidades são cumpridas; e 4) todas as folgas tem um valor igual ou superior a 18.

Para os pontos 1) e 2), podemos observar por onde passam os fluxos em cada stream.

* Na stream do nó 1 para o nó 2 com fluxo 8, o caminho seguido utiliza as variáveis X121 com fluxo 6.5, X131 com fluxo 1.5 e X321 com fluxo 1.5. Chegam 8 (6.5 + 1.5) fluxos ao nó 2.
* Na stream do nó 1 para o nó 5 com fluxo 20, o caminho seguido utiliza as variáveis X122 com fluxo 7.5, X252 com fluxo 7.5, X132 com fluxo 12.5, X352 com fluxo 11, X342 com fluxo 1.5 e X452 com fluxo 1.5. Chegam 20 (7.5 + 11 + 1.5) fluxos ao nó 5.
* Na stream do nó 2 para o nó 3 com fluxo 12, o caminho seguido utiliza a variável X233 com fluxo 12. Chegam 12 fluxos ao nó 3.
* Na stream do nó 2 para o nó 4 com fluxo 16, o caminho seguido utiliza as variáveis X244 com fluxo 11.5, X254 com fluxo 4.5 e X544 com fluxo 4.5. Chegam 16 (11.5 + 4.5) fluxos ao nó 4.
* Na stream do nó 3 para o nó 4 com fluxo 4, o caminho seguido utiliza as variáveis X345 com fluxo 3.5, X325 com fluxo 0.5 e X245 com fluxo 0.5. Chegam 4 (3.5 + 0.5) fluxos ao nó 4.
* Na stream do nó 3 para o nó 5 com fluxo 3, o caminho seguido utiliza a variável X356 com fluxo 3. Chegam 3 fluxos ao nó 5.
* Na stream do nó 4 para o nó 5 com fluxo 10, o caminho seguido utiliza as variáveis X427 com fluxo 2, X257 com fluxo 2 e X457 com fluxo 8. Chegam 10 (2 + 8) fluxos ao nó 5.

Assim, ficam comprovados os pontos 1) e 2).

Para os pontos 3) e 4), basta ver o valor da folga. Se o valor for negativo significa que o fluxo é superior à capacidade por definição de folga. Seguem-se as folgas nos oito arcos do sistema:

* No arco entre o nó 1 e o nó 2 passam 14 fluxos. A folga é de 18.
* No arco entre o nó 1 e o nó 3 passam 14 fluxos. A folga é de 18.
* No arco entre o nó 2 e o nó 3 passam 14 fluxos. A folga é de 18.
* No arco entre o nó 2 e o nó 4 passam 14 fluxos. A folga é de 18.
* No arco entre o nó 2 e o nó 5 passam 14 fluxos. A folga é de 18.
* No arco entre o nó 3 e o nó 4 passam 5 fluxos. A folga é de 27.
* No arco entre o nó 3 e o nó 5 passam 14 fluxos. A folga é de 18.
* No arco entre o nó 4 e o nó 5 passam 14 fluxos. A folga é de 18.

Como os valores de folga são positivos, podemos concluir que as capacidades em todos os arcos estão a ser cumpridas, que os valores de folga são equilibrados e são todos superiores ou iguais à folga mínima maximizada da nossa solução.

Logo, por 1), 2), 3) e 4), a nossa solução é válida e, como qualquer alteração implicaria o descumprimento das restrições colocadas ou uma solução pior ou igual, é ótima.

# Parte IV

Nesta parte pretende-se, tal como na parte I, identificar os arcos por onde passam os fluxos mas agora tendo em conta a necessidade de escolha de três opções que representam a capacidade de um arco. Esta escolha de capacidade prende-se pelo cálculo de um custo associado a cada capacidade (opção). Irá ser utilizada uma função com variáveis binárias na escolha das opções de capacidade.

## Questão 1

Para resolver este problema utilizou-se um modelo de programação linear mista onde são utilizadas variáveis binárias e variáveis reais. Assim, em relação à parte I deste projeto, esta parte irá diferenciar apenas na formulação de uma nova função objetivo e no acréscimo de restrições às já existentes na parte I.

Para as variáveis binárias foi escolhida a identificação opcao[origem][destino][opção]. Foram declarados três conjuntos de variáveis binárias que representam, cada um, o conjunto de nós associados a uma opção. Como se tratam de variáveis binárias apenas uma opção por arco poderá ser escolhida e o somatório das diferentes opções para cada arco tem de ser igual a 1 (um). Quer-se que seja igual a 1 para poder ser tomada a decisão de qual das opções escolher para os vários arcos. Para que tal ocorra, duas das três opções terão de ficar a zero e a restante a 1 que será a escolhida.

Tal como na parte II, terá de se ter ainda restrições para a capacidade de cada arco mas agora esta capacidade deixa de ser uma constante. Esta restrição de capacidade passa a ser definida por a capacidade de cada arco ser menor ou igual ao somatório das diferentes capacidades disponíveis multiplicadas pelas respetivas variáveis binárias. Assim, como apenas uma das variáveis binárias irá ter o valor 1 (que será a escolhida), uma vez que as restantes serão zero, cada arco irá ter o seu valor de capacidade bem definido.

Por fim, o último conjunto de restrições está associado ao custo por arco conforme a opção. Cada arco terá um custo igual ao somatório dos vários custos fixos multiplicados pelas respetivas opções. Mais uma vez, como apenas uma das opções terá o valor 1, o custo por arco será bem definido e representativo da opção escolhida.

Após este conjunto de restrições, foi possível determinar uma função objetivo suficientemente estruturada que implementa o objetivo do problema:

Min z = 8 custo12 + 12 custo13 + 2 custo23 + 7 custo24 + 10 custo25 + 4 custo34 + 6 custo35 + 1 custo45

São utilizados os custos de cada arco multiplicados pelo custo do arco conforme a opção (que já foi determinada) que respeita a forma do cálculo do custo, para cada opção, fornecida no enunciado.

## Questão 2

Ficheiro de *input* no programa:

/\* Funcao objetivo: Menor custo de transmissao \*/

min: 8 custo12 + 12 custo13 + 2 custo23 + 7 custo24 + 10 custo25 + 4 custo34 + 6 custo35 + 1 custo45;

/\* Opcoes por arco \*/

//Opcao[nodo1][nodo2][opcao]

opcao121 + opcao122 + opcao123 = 1;

opcao131 + opcao132 + opcao133 = 1;

opcao231 + opcao232 + opcao233 = 1;

opcao241 + opcao242 + opcao243 = 1;

opcao251 + opcao252 + opcao253 = 1;

opcao341 + opcao342 + opcao343 = 1;

opcao351 + opcao352 + opcao353 = 1;

opcao451 + opcao452 + opcao453 = 1;

/\* Custo por arco conforme a opcao \*/

custo12 = 50 opcao121 + 25 opcao122 + 10 opcao123;

custo13 = 50 opcao131 + 25 opcao132 + 10 opcao133;

custo23 = 50 opcao231 + 25 opcao232 + 10 opcao233;

custo24 = 50 opcao241 + 25 opcao242 + 10 opcao243;

custo25 = 50 opcao251 + 25 opcao252 + 10 opcao253;

custo34 = 50 opcao341 + 25 opcao342 + 10 opcao343;

custo35 = 50 opcao351 + 25 opcao352 + 10 opcao353;

custo45 = 50 opcao451 + 25 opcao452 + 10 opcao453;

/\* Capacidade por arco conforme a opcao \*/

x12 <= 50 opcao121 + 15 opcao122 + 5 opcao123;

x13 <= 50 opcao131 + 15 opcao132 + 5 opcao133;

x23 <= 50 opcao231 + 15 opcao232 + 5 opcao233;

x24 <= 50 opcao241 + 15 opcao242 + 5 opcao243;

x25 <= 50 opcao251 + 15 opcao252 + 5 opcao253;

x34 <= 50 opcao341 + 15 opcao342 + 5 opcao343;

x35 <= 50 opcao351 + 15 opcao352 + 5 opcao353;

x45 <= 50 opcao451 + 15 opcao452 + 5 opcao453;

/\* Fluxos no sistema por stream \*/

//fluxo de entrada - fluxo de saida - fluxo retido no no + fluxo produzido no no = 0 <=>

//fluxo de entrada - fluxo de saida = fluxo retido no no - fluxo produzido no no

//stream (1,2) K=1

x211 + x311 - x121 - x131 = -8;

x121 + x321 + x421 + x521 - x211 - x231 - x241 - x251 = 8;

x131 + x231 + x431 + x531 - x311 - x321 - x341 - x351 = 0;

x241 + x341 + x541 - x421 - x431 - x451 = 0;

x251 + x351 + x451 - x521 - x531 - x541 = 0;

//stream (1,5) K=2

x212 + x312 - x122 - x132 = -20;

x122 + x322 + x422 + x522 - x212 - x232 - x242 - x252 = 0;

x132 + x232 + x432 + x532 - x312 - x322 - x342 - x352 = 0;

x242 + x342 + x542 - x422 - x432 - x452 = 0;

x252 + x352 + x452 - x522 - x532 - x542 = 20;

//stream (2,3) K=3

x213 + x313 - x123 - x133 = 0;

x123 + x323 + x423 + x523 - x213 - x233 - x243 - x253 = -12;

x133 + x233 + x433 + x533 - x313 - x323 - x343 - x353 = 12;

x243 + x343 + x543 - x423 - x433 - x453 = 0;

x253 + x353 + x453 - x523 - x533 - x543 = 0;

//stream (2,4) K=4

x214 + x314 - x124 - x134 = 0;

x124 + x324 + x424 + x524 - x214 - x234 - x244 - x254 = -16;

x134 + x234 + x434 + x534 - x314 - x324 - x344 - x354 = 0;

x244 + x344 + x544 - x424 - x434 - x454 = 16;

x254 + x354 + x454 - x524 - x534 - x544 = 0;

//stream (3,4) K=5

x215 + x315 - x125 - x135 = 0;

x125 + x325 + x425 + x525 - x215 - x235 - x245 - x255 = 0;

x135 + x235 + x435 + x535 - x315 - x325 - x345 - x355 = -4;

x245 + x345 + x545 - x425 - x435 - x455 = 4;

x255 + x355 + x455 - x525 - x535 - x545 = 0;

//stream (3,5) K=6

x216 + x316 - x126 - x136 = 0;

x126 + x326 + x426 + x526 - x216 - x236 - x246 - x256 = 0;

x136 + x236 + x436 + x536 - x316 - x326 - x346 - x356 = -3;

x246 + x346 + x546 - x426 - x436 - x456 = 0;

x256 + x356 + x456 - x526 - x536 - x546 = 3;

//stream (4,5) K=7

x217 + x317 - x127 - x137 = 0;

x127 + x327 + x427 + x527 - x217 - x237 - x247 - x257 = 0;

x137 + x237 + x437 + x537 - x317 - x327 - x347 - x357 = 0;

x247 + x347 + x547 - x427 - x437 - x457 = -10;

x257 + x357 + x457 - x527 - x537 - x547 = 10;

/\* Fluxos no sistema por arcos \*/

x12 = x121 + x211 + x122 + x212 + x123 + x213 + x124 + x214 + x125 + x215 + x126 + x216 + x127 + x217;

x13 = x131 + x311 + x132 + x312 + x133 + x313 + x134 + x314 + x135 + x315 + x136 + x316 + x137 + x317;

x23 = x231 + x321 + x232 + x322 + x233 + x323 + x234 + x324 + x235 + x325 + x236 + x326 + x237 + x327;

x24 = x241 + x421 + x242 + x422 + x243 + x423 + x244 + x424 + x245 + x425 + x246 + x426 + x247 + x427;

x25 = x251 + x521 + x252 + x522 + x253 + x523 + x254 + x524 + x255 + x525 + x256 + x526 + x257 + x527;

x34 = x341 + x431 + x342 + x432 + x343 + x433 + x344 + x434 + x345 + x435 + x346 + x436 + x347 + x437;

x35 = x351 + x531 + x352 + x532 + x353 + x533 + x354 + x534 + x355 + x535 + x356 + x536 + x357 + x537;

x45 = x451 + x541 + x452 + x542 + x453 + x543 + x454 + x544 + x455 + x545 + x456 + x546 + x457 + x547;

/\* Declaracao variaveis \*/

bin opcao121, opcao131, opcao231, opcao241, opcao251, opcao341, opcao351, opcao451;

bin opcao122, opcao132, opcao232, opcao242, opcao252, opcao342, opcao352, opcao452;

bin opcao123, opcao133, opcao233, opcao243, opcao253, opcao343, opcao353, opcao453;

## Questão 3

Ficheiro de *output* no programa:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Variables | MILP Feasible | MILP Better | result |  | Variables | MILP Feasible | MILP Better | result |
|  | 1100 | 1080 | 1080 |  |  | 1100 | 1080 | 1080 |
| custo12 | 50 | 25 | 25 |  | x213 | 0 | 0 | 0 |
| custo13 | 10 | 25 | 25 |  | x313 | 0 | 0 | 0 |
| custo23 | 50 | 50 | 50 |  | x123 | 0 | 0 | 0 |
| custo24 | 10 | 10 | 10 |  | x133 | 0 | 0 | 0 |
| custo25 | 10 | 10 | 10 |  | x323 | 0 | 0 | 0 |
| custo34 | 50 | 50 | 50 |  | x423 | 0 | 0 | 0 |
| custo35 | 10 | 10 | 10 |  | x523 | 0 | 0 | 0 |
| custo45 | 50 | 50 | 50 |  | x233 | 12 | 12 | 12 |
| opcao121 | 1 | 0 | 0 |  | x243 | 0 | 0 | 0 |
| opcao122 | 0 | 1 | 1 |  | x253 | 0 | 0 | 0 |
| opcao123 | 0 | 0 | 0 |  | x433 | 0 | 0 | 0 |
| opcao131 | 0 | 0 | 0 |  | x533 | 0 | 0 | 0 |
| opcao132 | 0 | 1 | 1 |  | x343 | 0 | 0 | 0 |
| opcao133 | 1 | 0 | 0 |  | x353 | 0 | 0 | 0 |
| opcao231 | 1 | 1 | 1 |  | x543 | 0 | 0 | 0 |
| opcao232 | 0 | 0 | 0 |  | x453 | 0 | 0 | 0 |
| opcao233 | 0 | 0 | 0 |  | x214 | 0 | 0 | 0 |
| opcao241 | 0 | 0 | 0 |  | x314 | 0 | 0 | 0 |
| opcao242 | 0 | 0 | 0 |  | x124 | 0 | 0 | 0 |
| opcao243 | 1 | 1 | 1 |  | x134 | 0 | 0 | 0 |
| opcao251 | 0 | 0 | 0 |  | x324 | 0 | 0 | 0 |
| opcao252 | 0 | 0 | 0 |  | x424 | 0 | 0 | 0 |
| opcao253 | 1 | 1 | 1 |  | x524 | 0 | 0 | 0 |
| opcao341 | 1 | 1 | 1 |  | x234 | 11 | 11 | 11 |
| opcao342 | 0 | 0 | 0 |  | x244 | 5 | 5 | 5 |
| opcao343 | 0 | 0 | 0 |  | x254 | 0 | 0 | 0 |
| opcao351 | 0 | 0 | 0 |  | x434 | 0 | 0 | 0 |
| opcao352 | 0 | 0 | 0 |  | x534 | 0 | 0 | 0 |
| opcao353 | 1 | 1 | 1 |  | x344 | 11 | 11 | 11 |
| opcao451 | 1 | 1 | 1 |  | x354 | 0 | 0 | 0 |
| opcao452 | 0 | 0 | 0 |  | x544 | 0 | 0 | 0 |
| opcao453 | 0 | 0 | 0 |  | x454 | 0 | 0 | 0 |
| x12 | 23 | 13 | 13 |  | x215 | 0 | 0 | 0 |
| x13 | 5 | 15 | 15 |  | x315 | 0 | 0 | 0 |
| x23 | 33 | 23 | 23 |  | x125 | 0 | 0 | 0 |
| x24 | 5 | 5 | 5 |  | x135 | 0 | 0 | 0 |
| x25 | 5 | 5 | 5 |  | x325 | 0 | 0 | 0 |
| x34 | 28 | 28 | 28 |  | x425 | 0 | 0 | 0 |
| x35 | 5 | 5 | 5 |  | x525 | 0 | 0 | 0 |
| x45 | 23 | 23 | 23 |  | x235 | 0 | 0 | 0 |
| x211 | 0 | 0 | 0 |  | x245 | 0 | 0 | 0 |
| x311 | 0 | 0 | 0 |  | x255 | 0 | 0 | 0 |
| x121 | 8 | 8 | 8 |  | x435 | 0 | 0 | 0 |
| x131 | 0 | 0 | 0 |  | x535 | 0 | 0 | 0 |
| x321 | 0 | 0 | 0 |  | x345 | 4 | 4 | 4 |
| x421 | 0 | 0 | 0 |  | x355 | 0 | 0 | 0 |
| x521 | 0 | 0 | 0 |  | x545 | 0 | 0 | 0 |
| x231 | 0 | 0 | 0 |  | x455 | 0 | 0 | 0 |
| x241 | 0 | 0 | 0 |  | x216 | 0 | 0 | 0 |
| x251 | 0 | 0 | 0 |  | x316 | 0 | 0 | 0 |
| x431 | 0 | 0 | 0 |  | x126 | 0 | 0 | 0 |
| x531 | 0 | 0 | 0 |  | x136 | 0 | 0 | 0 |
| x341 | 0 | 0 | 0 |  | x326 | 0 | 0 | 0 |
| x351 | 0 | 0 | 0 |  | x426 | 0 | 0 | 0 |
| x541 | 0 | 0 | 0 |  | x526 | 0 | 0 | 0 |
| x451 | 0 | 0 | 0 |  | x236 | 0 | 0 | 0 |
| x212 | 0 | 0 | 0 |  | x246 | 0 | 0 | 0 |
| x312 | 0 | 0 | 0 |  | x256 | 0 | 0 | 0 |
| x122 | 15 | 5 | 5 |  | x436 | 0 | 0 | 0 |
| x132 | 5 | 15 | 15 |  | x536 | 0 | 0 | 0 |
| x322 | 0 | 0 | 0 |  | x346 | 3 | 3 | 3 |
| x422 | 0 | 0 | 0 |  | x356 | 0 | 0 | 0 |
| x522 | 0 | 0 | 0 |  | x546 | 0 | 0 | 0 |
| x232 | 10 | 0 | 0 |  | x456 | 3 | 3 | 3 |
| x242 | 0 | 0 | 0 |  | x217 | 0 | 0 | 0 |
| x252 | 5 | 5 | 5 |  | x317 | 0 | 0 | 0 |
| x432 | 0 | 0 | 0 |  | x127 | 0 | 0 | 0 |
| x532 | 0 | 0 | 0 |  | x137 | 0 | 0 | 0 |
| x342 | 10 | 10 | 10 |  | x327 | 0 | 0 | 0 |
| x352 | 5 | 5 | 5 |  | x427 | 0 | 0 | 0 |
| x542 | 0 | 0 | 0 |  | x527 | 0 | 0 | 0 |
| x452 | 10 | 10 | 10 |  | x237 | 0 | 0 | 0 |
|  |  |  |  |  | x247 | 0 | 0 | 0 |
|  |  |  |  |  | x257 | 0 | 0 | 0 |
|  |  |  |  |  | x437 | 0 | 0 | 0 |
|  |  |  |  |  | x537 | 0 | 0 | 0 |
|  |  |  |  |  | x347 | 0 | 0 | 0 |
|  |  |  |  |  | x357 | 0 | 0 | 0 |
|  |  |  |  |  | x547 | 0 | 0 | 0 |
|  |  |  |  |  | x457 | 10 | 10 | 10 |

Nota: A coluna de solução é a *result*.

## Questão 4

Para confirmar que a solução anterior é válida, temos de verificar: 1) Os fluxos no sistema são conservados; 2) que os fluxos de determinada *stream* chegam todos ao destino; 3) que o conjunto dos fluxos das várias *streams* em cada arco não ultrapassa a capacidade para esse arco (capacidade esta definida pela opção escolhida para o arco); e 4) que o somatório dos custos terá o valor 1080.

Em relação aos pontos 1) e 2), faremos uma apresentação simples da solução ao apresentar o caminho escolhido para cada *stream*. Utilizaremos a notação X->Y:A para descrever o fluxo A que parte de X e chega a Y.

* Para a *stream* de 1 para 2 (k=1) com fluxo de 8, o caminho percorrido foi 1->2:8. Chegaram 8 fluxos ao nó 2.
* Para a *stream* de 1 para 5 (k=2) com fluxo de 20, o caminho percorrido foi 1->2:5, 2->5:5, 1->3:15, 3->5:5, 3->4:10 e 4->5:10. Chegaram 20 (5+5+10) fluxos ao nó 5.
* Para a *stream* de 2 para 3 (k=3) com fluxo de 12, o caminho percorrido foi 2->3:12. Chegaram 12 fluxos ao nó 3.
* Para a *stream* de 2 para 4 (k=4) com fluxo de 16, o caminho percorrido foi 2->4:5, 2->3:11 e 3->4:11. Chegaram 16 (5+11) fluxos ao nó 4.
* Para a *stream* de 3 para 4 (k=5) com fluxo de 4, o caminho percorrido foi 3->4:5. Chegaram 4 fluxos ao nó 4.
* Para a *stream* de 3 para 5 (k=6) com fluxo de 3, o caminho percorrido foi 3->4:3 e 4->5:3. Chegaram 3 fluxos ao nó 5.
* Para a *stream* de 4 para 5 (k=7) com fluxo de 10, o caminho percorrido foi 4->5:10. Chegaram 10 fluxos ao nó 5.

Como todos os fluxos de cada *stream* chegam ao destino e nos nós intermédios por onde há passagem de fluxos não existe retenção ou produção de fluxos, isto é, o que entra no nó também saí do mesmo, pode-se afirmar que os pontos 1) e 2) são válidos.

Para o ponto 3, basta verificar a opção do arco e comparar com quantos fluxos passaram pelo mesmo. Então para cada arco *ij* temos:

* No arco 12 foi escolhida a opção 2 com capacidade 15. Neste arco passam 13 fluxos.
* No arco 13 foi escolhida a opção 2 com capacidade 15. Neste arco passam 15 fluxos.
* No arco 23 foi escolhida a opção 1 com capacidade 50. Neste arco passam 23 fluxos.
* No arco 24 foi escolhida a opção 3 com capacidade 5. Neste arco passam 5 fluxos.
* No arco 25 foi escolhida a opção 3 com capacidade 5. Neste arco passam 5 fluxos.
* No arco 34 foi escolhida a opção 1 com capacidade 50. Neste arco passam 28 fluxos.
* No arco 35 foi escolhida a opção 3 com capacidade 5. Neste arco passam 5 fluxos.
* No arco 45 foi escolhida a opção 1 com capacidade 50. Neste arco passam 23 fluxos.

Ora, como os fluxos nos arcos são menores ou iguais à capacidade, o ponto 3 é válido.

Por último, para verificar o ponto 4), temos de calcular os custos ter o resultado de 1080. Para calcular estes custos são relevantes as opções para cada arco, visto que tem influência no cálculo. Então para cada arco *ij* temos:

* No arco 12 foi escolhida a opção 2 com custo 25. Este arco tem o custo fixo de 8. O custo total é 25x8=200.
* No arco 13 foi escolhida a opção 2 com custo 25. Este arco tem o custo fixo de 12. O custo total é 25x12=300.
* No arco 23 foi escolhida a opção 1 com custo 50. Este arco tem o custo fixo de 2. O custo total é 50x2=100.
* No arco 24 foi escolhida a opção 3 com custo 10. Este arco tem o custo fixo de 7. O custo total é 10x7=70.
* No arco 25 foi escolhida a opção 3 com custo 10. Este arco tem o custo fixo de 10. O custo total é 10x10=100.
* No arco 34 foi escolhida a opção 1 com custo 50. Este arco tem o custo fixo de 4. O custo total é 50x4=200.
* No arco 35 foi escolhida a opção 3 com custo 10. Este arco tem o custo fixo de 6. O custo total é 10x6=60.
* No arco 45 foi escolhida a opção 1 com custo 50. Este arco tem o custo fixo de 1. O custo total é 50x1=50.

Assim, o custo total é 200+300+100+70+100+200+60+50=1080. Este é o valor da nossa solução, logo o ponto 4) também é válido.

Como todos os pontos enunciados são válidos, podemos afirmar que a nossa solução é válida e que os custos estão corretos.

**Conclusão**

Este trabalho resultou no âmbito da disciplina de Métodos Determinísticos de Investigação Operacional. Esperava-se que deste trabalho resultasse uma nova perspetiva de abordagem a um problema complexo que possui uma ou várias soluções. O problema consistia em quatro partes relativamente diferenciadas onde era exposto um problema de “bandwidth” numa rede (com ou sem capacidade por *stream*) em que a resolução passava pela minimização dos custos totais ou pelo controlo de fluxos.

Relativamente às principais dificuldades, surgiram inicialmente para a escolha de um modelo matemático dada a complexidade do problema e o número de variáveis. Após esse obstáculo surgiram algumas dificuldades na parte 3. Para a parte 3 os resultados eram inconsistentes dado que não existia um pensamento correto para a resolução do problema. Após uma nova abordagem o problema passou a ter uma solução válida e ótima.

Por fim, este trabalho permitiu-nos trabalhar com o programa LPSolve, que é uma ferramenta poderosíssima para este tipo de problema permitindo em minutos resolver problemas com centenas de variáveis.